SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Angelo Favini

UN'EQUAZIONE ASTRATTA DEL TIPO BENJAMIN-BONA-MAHONY

30 gennaio 1992

1.Introduzione. Esporrò dei risultati che ho ottenuto molto recentemente in collaborazione con I.LASIECKA e H.TANABE.
Essi riguardano questioni connesse ad esistenza locale, stime a priori (e quindi esistenza globale) e regolarità delle soluzioni del seguente problema di Cauchy.

$$(1) \qquad \begin{cases} Mu_t(t) = f(t,u(t)), t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \in D(M). \end{cases}$$

dove M è un operatore lineare chiuso che agisce da $D(M) \subset X$ in X, X essendo uno spazio di Banach, ed M invertibile, cioè esiste M^{-1} limitato.
La funzione non lineare f è definita da $[0,\infty) x Y$ a X, con Y uno spazio di Banach tale che

$$(2) \qquad D(M) \subset Y \subset X,$$

con immersioni continue.
Ci sono molte equazioni di interesse fisico che possono essere messe nella forma (1)
Per esempio, la famosa equazione di Benjamin-Bona-Mahony, studiata in [BBM] e sue varie estensioni rientrano in questo tipo.
Faccio riferimento a [C,SS] e, sopratutto al lavoro di J.A.GOLDSTEIN, R.KAJIKIJA, S.OHARU [GKO], poichè i risultati che esporrò ridanno ed estendono molti dei loro.
Mi limiterò, negli esempi, a considerare un solo specifico operatore differenziale M, ma molti altri, come quelli trattati in [SS], potrebbero essere sostituiti ad esso.
Ricordo che l'equazione formulata da Benjamin,Bona e Mahony ha la forma

$$u_t + (u + \frac{u^2}{2})_x - u_{xxt} = 0, \quad (x,t) \in R x (0,\infty).$$

Essa modella onde lunghe con piccola ampiezza e costituisce un modello sostitutivo per l'equazione di Korteweg-de Vries.
Tornando alla equazione astratta (1), essa é stata ampiamente studiata [vedi,p.e.[CS,pp.166-179]], dove f agisce da $[0,T] x B$ in V', duale dello spazio di Banach riflessivo e separabile V, e B è una sfera chiusa centrata in $u_0 \in V$.
L'approccio a (1) che descriverò è, invece, più vicino a [GKO], e consente di trattare (1) in uno spazio non riflessivo.
Il seminario è suddiviso in tre parti.
La sezione 2 contiene l'enunciato dei risultati principali. Gli esempi che motivano ed illustrano i teoremi astratti sono dati nella sezione 3. La sezione restante fornisce un cenno delle prove.

2.Enunciato dei risultati principali. Cominciamo col seguente teorema di esistenza locale.

TEOREMA 1. (Esistenza locale) *Valga* (2) *e sia* $f:[0,\infty) x Y \to X$ *in* $t \geq 0$ *e localmente lipschitziana in* $u \in Y$,*con costante di Lipschitz uniforme in* $t \in [0,T]$, *per ogni* $T < \infty$. *Allora per ogni* $u_0 \in D(M)$ *esiste* $T_{max} \leq \infty$ *tale che* (1) *ha una unica soluzione stretta* $u = u(\cdot) \in C^{(1)}([0,T_{max}); D(M))$.

Seguono due affermazioni sulla regolarità della soluzione.

TEOREMA 2. (Regolarità spaziale) *Valgano le ipotesi del* Teorema 1. *Inoltre esistano* $\alpha>0$ *e uno spazio di Banach* Z *tale che* M *abbia potenza frazionaria* M^α *soddisfacente*

$$D(M^{\alpha+1}) \subset Z \subset D(M^\alpha).$$

Se f: $[0,\infty)xZ \rightarrow D(M^\alpha)$ *ha la proprietà*

(3) $\quad t \rightarrow f(t,u)$ *è continua da* $[0,\infty)$ *in* $D(M^\alpha)$, *per ogni* $u \in Z$;

(4) $$\begin{cases} \textit{Per ogni } R,T>0 \textit{ esiste } C=C(R,T) \textit{ tale che} \\ \|f(t,u_1)-f(t,u_2);D(M^\alpha)\| \le C(R,T)\, \|u_1-u_2;Z\| \\ 0\le t\le T,\ u_i \in Z,\ \|u_i-u_0;\ Z\| \le R, \end{cases}$$

e $u_0 \in D(M^{\alpha+1})$, *allora la soluzione* u *di* (1) *ha la regolarità*

$$u \in C^{(1)}([0,T_{max}); D(M^{\alpha+1})).$$

TEOREMA 3. (Regolarità temporale) *Supponiamo che esistano* $R,T,K>0$, $0<\theta<1$, *tali che*

(5) $$\|f(t_1,u_1)-f(t_2,u_2);X\| \le K(|t_1-t_2|^\theta + \|u_i-u_2;Y\|)$$
per ogni $t_i \in [0,T]$, $\|u_i-u_0;Y\| \le R, i=1,2.$

Se $u_0 \in D(M)$, *allora il problema* (1) *ha una unica soluzione stretta locale* u *tale che* $u' \in C^\theta[0,T_1;D(M)]$, *per un opportuno* $T_1 \in (0,T]$.

I prossimi risultati concernono stime a–priori della soluzione di (1) e porteranno alla esistenza globale di essa.

TEOREMA 4. *Sia* u(t) *la soluzione di* (1) *descritta nel* TEOREMA 1. *Supponiamo che esista uno spazio di Banach* W *tale che*

(6) $$\begin{cases} \textit{Se } u(0) = u_0 \in D(M) \cap W, \textit{ allora } u(t) \in W \textit{ e} \\ \|u(t);W\| \le K_0(\|u(0);W\|), \\ \textit{dove } K_0(\cdot) \textit{ non dipende da } T_{max}. \end{cases}$$

Inoltre , M *e* f *abbiano estensioni* M_1 *e* f_1, *rispettivamente, ad uno spazio di Banach* $X_1 \supset X$ *soddisfacenti proprietà analoghe* (cfr. Teorema 1) *e*

(7) $$\|f_1(t,u);X_1\| \le C(\|u;W\|)\, \|u;D(M_1)\|\, g(t),$$
dove $g \in L^1$ *localmente.*
Allora per $u_0 \in D(M) \cap W$, *si ha*

(8) $$\|u(t);D(M_1)\| \le K_1(\|u_0;\ D(M)\|,\|u_0;W\|)\, \|g;L^1(0,t)\|,\ 0<t<T_{max}.$$

Notiamo che se $X_1=X$, allora la (8) implica subito che la soluzione u del problema (1) è globale, perchè altrimenti

$$\lim_{t \to T_{max}} \|u(t);D(M)\| = \infty$$

([P,pp.185-186]), contraddicendo (8).

Se, invece, X è strettamente contenuto in X_1, la stima a priori ottenuta in (8) può essere presa come (6), con $W= D(M_1)$.
Iterando il ragionamento, si ottiene il

TEOREMA 5. *Valga l'ipotesi* (6), *ed esistano* n *spazi di Banach* X_i *ed estensioni* M_i *e* f_i, $i=1,\dots, n$,*tali che*

(9) $$X_1 \supset X_2 \supset \dots\dots \supset X_n \equiv X,$$

(10) $$M_n= M, \ \ f_n=f$$

(11) $$\|f_i(t,u);\ X_i\| \le C_i(\|u;D(M_{i-1})\|)\|u;D(M_i)\|\ g_i(t),$$
con $g_i \in L^1$ *localmente*, $i = 1,\dots,n$.

Allora c'è $g_{n+1} \in L^1$ *localmente, tale che*

$$\|u(t);D(M)\| \le K(\|u(0);D(M)\|)\ \|\ g_{n+1};L^1(0,t)\|$$

e la soluzione u *di* (1) *è globale.*

Un criterio semplice per avere una stima del tipo (6) è dato dal seguente

TEOREMA 6. *Sia* M *la parte in* X *di un operatore autoaggiunto positivo* M_0 *in uno spazio di Hilbert* $X_0 \supset X$ *tale che per ogni* $t \in [0,T], 0 < T < T_{max}$, *e ogni soluzione* $u \in C^1([0,T];D(M))$, (*garantita dal* Teorema 1), *si abbia*

(12) $$(f(t,u(t)),u(t))_{X_0} \le 0\ .$$

Allora (6) *è soddisfatta con* $W = D(M_0^{1/2})$.

Osserviamo che (12) è banalmente soddisfatta se $(f(t,u),u)_{X_0} \le 0$ per ogni $t \ge 0$ e $u \in D(M_0)$.

Dimostriamo velocemente il Teorema 6.

La soluzione $u =u(t)$ di (1) è $C^{(1)}$ da $[0,T_{max})$ in X_0.
Prendendo il prodotto interno (in X_0) della equazione di (1) con u(t), la (12) assicura che si ha

$$\frac{d}{dt} \|M_0^{1/2}u(t);X_0\|^2 \le 0, \quad 0 \le t < T_{max},$$

e così

$$\|u(t);D(M_0^{1/2})\| \le \|u(0);\ D(M_0^{1/2})\|.\#$$

3. Esempi motivanti il modello astratto (1)

3.1 Questo è il problema studiato in [GKO]. Essi considerano

$$(13)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u_t = \operatorname{div} \tilde{f}(u), \ \text{su } (0,\infty)\mathrm{x}\Omega, \\ u(t,x) = 0, \ t > 0, \ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

dove $\infty > p > \max\{n/2, 1\}$, Ω essendo un insieme aperto limitato di R^n, $n \geq 2$, con frontiera regolare $\partial\Omega$; $\tilde{f}$ è una funzione vettoriale $\tilde{f}(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u))$ di classe $C^{(2)}(R;R^n)$ con $f(0)=0$.
Il problema (13) diventa un caso speciale di (1) una volta che si prenda

$$X = L^p(\Omega), \quad M = I - A,$$

con
$$Au = \Delta u, \ u \in D(A) = Y = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$f(t,u) = \operatorname{div} \tilde{f}(u).$$

Poichè $p > n/2$, il Teorema di immersione di Sobolev implica che

$$\|u; L^\infty(\Omega)\| \leq C\| u; W^{2,p}(\Omega)\|$$

e

$$\|(\nabla \cdot \tilde{f})(u); L^\infty(\Omega)\| \leq C(\|u; W^{2,p}(\Omega)\|).$$

Utilizzando queste due stime, vediamo che per ogni $u_1, u_2 \in W^{2,p}(\Omega)$, con

$$\|u_i; W^{2,p}(\Omega)\| \leq R, \ R > 0, \ i = 1,2,$$

si ha
$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2); X\| &\leq \|(\nabla \cdot \tilde{f})(u_1) - (\nabla \cdot \tilde{f})(u_2); L^\infty(\Omega)\| \, \|\nabla u_1; X\| \\ &\quad + \|(\nabla \cdot \tilde{f})(u_2); L^\infty(\Omega)\| \, \|\nabla u_1 - \nabla u_2; X\| \\ &\leq C(R)\{\|u_1; W^{1,p}(\Omega)\| \, \|u_1 - u_2; L^\infty(\Omega)\| + \|u_1 - u_2; W^{1,p}(\Omega)\|\} \\ &\leq C(R) \, \|u_1 - u_2; W^{2,p}(\Omega)\| = C(R)\|u_1 - u_2; D(M)\|. \end{aligned}$$

Possiamo quindi applicare direttamente i risultati dei Teoremi 1 e 3.

Per ottenere stime a priori opportune, assumeremo

$$(14 \qquad \begin{cases} |f'_i(s)| \leq M(1+|s|)^\alpha, & s \in R, \ i = 1, \ldots n, \\ 0 \leq \alpha \leq 2(n-2)^{-1}, & n > 2. \end{cases}$$

Poichè vogliamo applicare il Teorema 6, con $X_0 = L^2(\Omega)$, per evitare complicazioni, ci limitiamo al caso

$$p \geq 2.$$

Prima verifichiamo la (12), con $W = H_0^1(\Omega)$.
A tal fine, poniamo

$$F_1(u)=\tilde{f}(u)u \quad , \qquad F(u)=\int_0^u \tilde{f}(s)ds.$$

Applicando due volte il teorema della divergenza, si ottiene

$$(f(u),u)_{X_0} = \int_{\partial\Omega} [\mathrm{div}\, F_1(u) - \tilde{f}(u)\cdot\nabla u]d\Omega =$$

$$\int_{\partial\Omega} F_1(u)\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathrm{div}\, F(u)d\Omega= \int_{\partial\Omega} F_1(u)\partial\Omega- \int_{\partial\Omega} F(u)\partial\Omega=0,\ u\in H_0^1(\Omega),$$

poichè $F(0)=0$ e $u_{|\partial\Omega}=0$, come si è asserito.

Resta da provare la (7)

Il discorso è diretto se $2<p<n$.

Infatti, in tal caso, in virtù della ipotesi (14), per la disuguaglianza di Hölder e l'immersione

$$W^{1,2}(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega),$$

si ha

$$\|f(t,u);X\| \le C(\int_{\Omega} |u|^{\alpha p} |\nabla u|^p dx)^{1/p} \le$$

$$\le C(\int_{\Omega} |u|^{\alpha p\frac{n}{p}} dx)^{\frac{1}{n}} (\int_{\Omega} |\nabla u|^{\frac{pn}{n-p}} dx)^{\frac{n-p}{pn}}$$

$$\le C_1\|u;H_0^1(\Omega)\|^{\frac{2}{n-2}} \|u;W^{2,p}(\Omega)\|,$$

e quindi la (7), con $W = H_0^1(\Omega)$.

Se $p\ge n$, si prende una $r<n$ cosicchè la precedente stima è vera per $p=r$ .Si innesca così la procedura indicata nel Teorema 5 scegliendo $X=X_2=L^p(\Omega)$, $X_1= L^r(\Omega)$, $D(M_1)= =W^{2,r}(\Omega)\cap W_0^{1,r}(\Omega)$, $D(M_2)=D(M)$, $M_2=M$, $M_1=$ estensione di M a X_1.

Adottando sempre la scrittura $f(u)$ per le sue estensioni si ha

(15) $$\|f(u);X_2\| \le C\,\|u;L^\infty(\Omega)\|^{\alpha}\|\nabla u;L^p(\Omega)\|.$$

Poichè

$$\|\nabla u;X\| \le C\,\|u;W^{2,p}(\Omega)\|$$

e

$$W^{2,r}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \qquad n/2<r<n ,$$

si ha

$$\|u; L^{\infty}(\Omega)\| \le C'' \|u; W^{2,r}(\Omega)\|,$$

che è quanto desiderato.
Si conclude, dunque, che

$$\|u(t); W^{2,p}(\Omega)\| \le K (\|u(0); D(M)\|)$$

e l'esistenza globale è assicurata.
Notiamo, infine, che se $\tilde{f}$ è più regolare, è possibile applicare il Teorema 2.

3.2. Consideriamo il problema

$$(16) \qquad \begin{cases} (1-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2})\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (F(u(t,x)))_x = 0, & 0 \le t \le T, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}, \\ u(t,x) \to 0 \quad \text{per } |x| \to \infty, \ t > 0, \end{cases}$$

dove F è $C^{(1)}$ da $\mathbb{R}$ in sè e $F'(0)=0$.

Denotiamo con $C(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue e limitate da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, normato da

$$\|u\| = \sup_x |u(x)|.$$

$C_0(\mathbb{R})$ è il sottospazio di $C(\mathbb{R})$ delle funzioni $u(x)$ convergenti a zero per $|x| \to \infty$.

Il problema (16) rientra in (1) se si pone $X = C_0(\mathbb{R})$,

$Mu = u - u'', u \in D(M) = \{u \in X; u \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}), u'' \in X\}, \ q > 1,$

$f(u)(x) = -F'(u(x)u'(x), \ u \in D(M).$

E' ben noto [S] che

$$\sup_x |u(x)| + \sup_x |u'(x)| \le C \ \|Mu; X\|, \ u \in D(M).$$

Inoltre, poichè $F'(0) = 0$, f muta D(M) in X.

Poi, se u_1, u_2 soddisfano $\|u_i; D(M)\| \le R$, $i = 1,2$, si ha

$$\|f(u_1) - f(u_2); X\| \le c_1(R) \|u_1-u_2; X\| + c_2(R) \|(u_1-u_2)'; C(\mathbb{R})\| \le$$

$$\le c_3(R) \| u_1 - u_2; D(M)\|.$$

Pertanto, si applicano i Teoremi 1 e 3. Essi forniscono esistenza ed unicità di soluzioni u di (16) tali che, rispettivamente,

$u \in C^{(1)}([0,T_{max}); D(M))$,

$u' \in C^{\theta}[0,T;D(M)]$, $0<\theta<1$, per un certo $T \in (0,T_{max})$.

Per applicare il Teorema 2, basta assumere che F sia sufficientemente regolare ed alcune sue derivate si annullino in 0.

Per esempio, limitiamoci a $\alpha=1$.

Si deve allora stimare

$$\| f(u_1)''-f(u_2)''; X \| = \sup_x |g''(x)|,$$

dove $\qquad g(x) = F'(u_1(x))u_1'(x) - F'(u_2(x))u_2'(x).$

Calcoli elementari mostrano allora che se $F \in C^{(4)}(\mathbb{R})$, con $F'(0) = F^{(3)}(0) = 0$, allora per ogni $u_i \in D(M^2)$, $\|u_i;D(M^2)\| \leq R$, $i = 1,2$, si ha

$$\|M[f(u_1) - f(u_2)] ; X\| \leq C(R) \|u_1-u_2; D(M^2)\|.$$

Veniamo alla esistenza globale della soluzione.
Osserviamo, prima di tutto, che la stima a priori (6) vale con $W = H^1(\mathbb{R})$, come risulta, per esempio, da [GKS, p.623]:

$$\|u(t);H^1(\mathbb{R})\| = \|u(0);H^1(\mathbb{R})\|, \quad 0<t<T_{max},$$

per ogni $u(0) = u_0 \in W^{2,p}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$, dove $p>1$. Inoltre, se F soddisfa

$$|F'(s) \leq C(1+|s|)^{\alpha}, \ \alpha>0, \tag{17}$$

allora la (7) del Teorema 4 è vera, con $X_1 = X = C_0(R)$.

Infatti, poichè $F'(u)u_x \in C_0(\mathbb{R})$, $u \in D(M)$, (si noti che $F'(0)=0$), si h

$$\|f(u);C_0(\mathbb{R})\| \leq \sup_x |u'(x)| \sup_x |F'(u(x))|$$

$$\leq C \sup_x (1+|u(x)|)^{\alpha} \sup_x |u'(x)|.$$

Ora, è ben noto [P; p.222] che $H^1(\mathbb{R})$ è immerso con continuità in $C_0(\mathbb{R})$, e così

$$\|f(u);X\| \leq K (\|u;H^1(\mathbb{R})\|) \|u;D(M)\|.$$

Si conclude che per ogni $u_0 \in D(M)$ esiste una unica soluzione locale con la regolarità suddetta e se $u_0 \in D(M) \cap H^1(\mathbb{R}) \cap W^{2,p}(\mathbb{R})$, per un $p>1$, (in particolare, se $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$),
la condizione (17) garantisce che tale soluzione è globale.

3.3 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} (1 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}) \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) + (F(u(t,x))_x = 0, \ 0 \leq t \leq T, \ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,x) = u_0(x) \ , \ 0 \leq x \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \ , \ 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{18}$$

Questa volta prendiamo come X lo spazio C[0,1],

$D(A) = \{u \in C^{(2)}[0,1];\ u(0) = u(1) = 0\}$, $Au = u''$, $u \in D(A)$,
$M = I-A$.

A genera un semigruppo analitico in X a dominio non denso e così M ha inverso limitato.

Supponiamo $F \in C^{(2)}(\mathbb{R})$ e poniamo

$$f(u)(x) = -u(x) - F'(u(x))u'(x),\quad u \in C^{(2)}[0,1].$$

Si vede subito che tutte le ipotesi dei Teoremi 1e 3 sono soddisfatte.
Per studiare l'esistenza globale della soluzione di (18), osserviamo che il Teorema 6 può essere applicato con $X_0 = L^2(0,1)$ e

M_0 dato da $D(M_0) = H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$, $M_0 u = u-u''$, $u \in D(M_0)$, perchè per ogni $u \in D(M_0)$ si ha

$$(f(u),u)_{X_0} = -\int_0^1 u'u - \int_0^1 (F(u))_x u = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}|u|^2 - \int_0^1 \left(\frac{d}{dx}F(u(x))\right)u(x)dx =$$

$$= \int_0^1 F(u(x))u'(x)dx = G(u(1)) - G(u(0)) = 0,$$

con $G(u) = \displaystyle\int_0^u F(s)ds$.

Così lo spazio W in (6) è $H^1_0(0,1)$.

Supponiamo che valga la (17) per la F.
Allora anche l'ipotesi (7) è soddisfatta, con la scelta $X_1 = X = C[0,1]$.

Infatti, poichè $|u'(x)| \leq C\, \|u;D(M)\|$, per ogni $u \in D(M)$ e $x \in [0,1]$, abbiamo

$$\|f(u);X\| = \sup_x |u'(x) + F'(u(x))u'(x)| \leq \sup_x (1+|F'(u(x))|)\|u;D(M)\| \leq$$

$$\leq \sup_x (1+C(1+|u(x)|)^{\alpha})\, \|u;D(M)\| \leq$$

$$\leq C_1(\|u;X\|)\, \|u;D(M)\| \leq C_1(\|u;H^1_0(0,1)\|)\, \|u;D(M)\|,\ u \in D(M).$$

Concludiamo che se F ha la proprietà (17) e $u_0 \in D(M)$, cioè u_0 è $C^{(2)}$ su $[0,1]$ e $u(0) = u(1) = 0$, allora c'è una unica soluzione stretta globale u di (18) definita su $[0,\infty)$, cioè $u \in C^{(1)}([0,\infty);D(M))$.

4.Dimostrazioni

Dimostrazione del Teorema 1

Supponiamo che per ogni $T \geq 0$ e per ogni $c \geq 0$ ci sia una costante $L(c,T) \geq 0$ tale che

$\|f(t,u_1) - f(t,u_2); X\| \leq L(c,T) \| u_1-u_2;Y\|$,

dove $0 \leq t \leq T$ e $\|u_i ;Y\| \leq c$, $i = 1,2$.

Poichè
$\| M^{-1}v;Y\| \leq k\|M^{-1}v;D(M)\| = k\|v;X\|$,

se $v, w \in X$ hanno norma $\leq c$, allora $\|M^{-1}v;Y\| \leq kc$, $\|M^{-1}w;Y\| \leq kc$.

Se ne deduce che
$\|f(t,M^{-1}v) - f(t,M^{-1}w);X\| \leq kL(kc,T) \|v-w;X\|$

Ora, in virtù del Teorema 1.4 di [P,pp.185-186], per ogni $v_0= Mu_0$, c'è un $T_{max} >0$ tale che il problema

$$(19) \qquad \begin{cases} v'(t)=f(t, M^{-1}v(t)), & t \geq 0, \\ v(0)=v_0 \end{cases}$$

ha una unica soluzione"mild" su $[0,T_{max})$.
Ciò implica che $M^{-1}v(t) = u(t)$ è continua e soddisfa l'equazione integrale

$$Mu(t) = Mu_0 + \int_0^t f(s,u(s))ds.$$

Ma allora $Mu(\cdot)$ è $C^{(1)}$ su $[0,T_{max})$ e vale (1).

Notiamo infatti che, essendo M un operatore chiuso, $(Mu(t))'= Mu'(t)$. #

Il Teorema 2 si prova applicando M^{α} alla (1) e sfruttando poi le ipotesi (3), (4), come nel Teorema 1.

Dimostrazione del Teorema 3

Ponendo $Mu = v$, il problema (1) diventa (19), con $v_0 = Mu_0$.

Notiamo che, in forza delle ipotesi, ci sono costanti positive ε, ε_1 e K tali che se
$\|v_i - Mu_0; X\| \leq \varepsilon_1$, $0 \leq t_1, t_2 \leq \varepsilon$,

$$\|f(t_1, M^{-1}v_1) - f(t_2, M^{-1}v_2); X\| \leq K\{|t_1-t_2|^{\theta} + \|v_1-v_2;X \|\}.$$

Posto $B = \max_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|f(t,u_0); X\|$, scegliamo $T >0$ tale che

$$2T(B+K\varepsilon_1) \leq \varepsilon_1.$$

Se $\mathcal{C} = C[0,T_1;X]$, con la norma del massimo ed $\mathcal{S}$ è dato da

$$\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{C};\ v(0) = Mu_0,\ \|v(t) - Mu_0; X\| \leq \varepsilon_1\},$$

si riconosce che la $\mathcal{G}$ definita da

$$\mathcal{G}\, v(t) = Mu_0 + \int_0^t f(s, M^{-1}v(s))ds$$

muta $\mathcal{S}$ in sè ed è una contrazione se T_1 è piccolo.
Il punto fisso di $\mathcal{G}$ è soluzione stretta di (1) su un opportuno intervallo $[0,T_1]$.
Denotiamola con $v = v(t)$.
Si riconosce che

$$\|f(t,M^{-1}v(t));X\| \leq N, \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

e quindi per $0 \leq t_1 < t_2 \leq T_1$,

$$\|v(t_1) - v(t_2);X\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(s,M^{-1}v(s));X\|ds \leq N|t_1 - t_2|.$$

Ma allora esistono $K_1, K_2 > 0$ tali che

$$\|v'(t)-v'(s);X\| = \|f(t,M^{-1}v(t)) - f(s,M^{-1}v(s)); X\| \leq$$

$$\leq K_1\{|t - s|^\theta + \|v(t) - v(s);X\|\} \leq K_2\,|t - s|^\theta. \ \#$$

Dimostrazione del Teorema 4
Sappiamo che (1) ha una unica soluzione locale stretta $u \in C^{(1)}([0,T_{max});D(M))$, che è anche in $C^{(1)}([0,T_{max});D(M_1))$, e soddisfa

$$Mu(t) = Mu(0) + \int_0^t f(s,u(s))ds.$$

In forza delle assunzioni (6) e (7), deduciamo

$$\|u(t);D(M_1)\| \leq \|u(0);D(M_1)\| + \int_0^t \|f(s,u(s));X_1\|ds \leq$$

$$\le \|u(0);D(M_1)\| + \int_0^t C(\|u(0);W\|)|g_1(s)|\,\|u(s);D(M_1)\|ds$$

$$\le C(\|u(0);D(M_1)\|, \|u(0);W\|)\,(1+\int_0^t g_1(s)\|u(s);D(M_1)\|ds.$$

Applicando la disuguaglianza di Gronwall, si ottiene

$$\|u(t);D(M_1)\| \le C_1(\|u(0);D(M_1)\|, \|u(0);W\|)\ \|g_1;L^1(0,t)\|,$$

come desiderato. #

Bibliografia

[BBM] T.B.Benjamin, J.L.Bona, J.J.Mahony, *Model equations for long waves n nonlinear dispersive systems* , Phil.Trans.Royal Soc.London, Ser.A, 272(1972),47-78.

[C] B.Calvert, *The equation* A(t,u(t))'+B(t,u(t))=0, Math.Proc.Cambr.Phil. Soc.,79(1976),545-561.

[CS] R.W.Carroll, R.E.Showalter, *Singular and Degenerate Cauchy problems*, Academic Press,1976.

[GKO] J.A.Goldstein, R.Kajikiya, S.Oharu, *On some nonlinear dispersive Equations in several variables* ,Diff.and Integral Eqs.3(1990),617-632.

[P] A.Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial differential equations* , Springer Verlag,1983.

[SS] P.E.Souganidis, W.A.Strauss, *Instability of a class of dispersive solitary waves* , Proceed.Royal Soc.Edimb. 114 A(1990),195-212.

[S] H.B.Stewart, *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators* , Trans.AMS 199(1974), 141-162.